הומומורפיזם של חבורות

# הגדרה

בהינתן שתי חבורות G,H, העתקה נקראת הומומורפיזם(הומ') אם

## הערה

מכאן והילך בקורס, (נשמיט את \*)

# דוגמאות

נגדיר העתקה ע"י . לפי משפט המכפלה של דט.:

1. V,W מעל

הם מהווים חבורות אבליות ביחס לחיבור וקטורים.  
תהא העתקה לינארית. מתקיים , כלומר הע"ל היא הומ'.

1. תהא G חבורה כלשהי. חבורה הטריוויאלית.  
   נגדיר ע"י .  
   מתקיים
2. תהא G חבורה. . נגדיר ע"י , כאשר , עבור k טבעי. אזי הומ'

# טענה 1

תהיינה G,H חבורות(חב'). הומ'. יחידה של G, יחידה של H. אזי [כלומר הומ' מעביר יחידה ליחידה]

## הוכחה

יהא .  
קיבלנו   
, H חב', לכן יש לו הפכי בH, .  
נכפיל את שני האגפים משמאל ב ונקבל

# הגדרה – איזומורפיזם

תהיינה G,H חב', איזומורפיזם(איז') אם הומ'(של חבורות) ו העתקה חח"ע ועל.

החבורות איזומורפיות אם קיים איז' ואז נסמן

# דוגמאות

1. העתקת הזהות: , היא איז'.
2. ,   
   נגדיר ע"י .  
   האם הומ'?  
   כלומר הומ'.  
   כמו כן, חח"ע ועל:  
    על: לכל , כלומר ממשי, יש מקור והוא .  
    חח"ע כי פונ' מונוטונית עולה ממש.
3. נגדיר חבורת החזקות של a. (a אות פורמלית)  
   אבריה: מכפלות מאורך סופי של a ו, עם הכלל ש והכפל=שרשור.

## תרגיל

זו חבורה אבלית אינסופית. למשל , *,*

*סימון: .   
נקראת גם: החבורה החופשית באות אחת.*

## עובדה

### הוכחה

נגדיר העתקה ע"י , עבור n טבעי ,

# עובדה 1

יש חבורה אחת בלבד עד כדי איזו' מסדר 1.

## חבורות מסדר 2:

עם חיבור מודולו 2.  
 החבורה הסימטרית על 2 אותיות.

תרגילון: יש חב' אחת בלבד מסדר 2  
תרגילון: יש חב' אחת בלבד מסדר 3

תרגיל: יש יותר מחב' אחת מסדר 4